Themen: Lineare Algebra	Dauer: 90 Min	Termin 8;

V. Lineare Algebra

1 Vektorrechnung

1.1. Begriff des Vektors Ein Vektor $\vec{v}$ ist eine geordnete Menge von Zahlen, $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots v_n)$ *wobei* $v_1, v_2, \ldots v_n \in \mathrm{IR}$. Die $v_i \in \mathrm{IR}$ heißen Komponenten des Vektors.

1.2. Beispiel: $\vec{v} = (3,4,6)$ (3-komponentiger Vektor)

$\vec{w} = (5,2,-23,1,0,\frac{2}{7},-733)$ (7-komponentiger Vektor)

1.3. Bemerkung: Hinsichtlich der Schreibweise unterscheidet man Zeilenvektoren $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots v_n)$ und Spaltenvektoren

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

1.4. Definition: Unter einem Skalar versteht man ein Element des Grundkörpers, d.h. hier eine reelle Zahl.

1.5. Definition: Zwei Vektoren sind gleich, wenn alle Komponenten gleich sind.

1.6. Bemerkung: 1) Vektoren werden komponentenweise addiert. Dabei kann man nur Vektoren addieren, die die gleiche Anzahl von

Komponenten haben. Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$. Dann

ist $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$.

2) Ein Vektor $\vec{v}$ wird mit einem Skalar α multipliziert, indem jede Komponente des Vektors einzeln multipliziert wird:

$$\alpha\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix}$$

<u>1.7. Beispiel:</u>

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind Vektoren des IR^3

$\vec{w}$ ist ein Vektor des IR^2

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$5\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$-\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1.8. Definition: Seien $\vec{v}, \vec{w} \in \mathrm{IR}^n$, mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$. Dann ist

$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1w_1+v_2w_2+.......+v_nw_n$. $\vec{v} \cdot \vec{w}$ heißt Skalarprodukt von $\vec{v}$ und $\vec{w}$.

1.9. Definition: Sei $\vec{v} = (v_1,v_2,.......,v_n)$. Dann ist die Länge oder der Betrag von $\vec{v}$ definiert durch $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2}$

<u>1.10. Beispiel:</u> $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

1.) $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0+2+21=23$

2.) $|\vec{v}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

<u>1.11 Gesetze der Vektoralgebra:</u>

Seien $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ Vektoren und α, β Skalare, dann gilt:

1.)	$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$	Kommutativgesetz der Addition
2.)	$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$	Assoziativgesetz der Addition
3.)	$\alpha\vec{u} = \vec{u}\alpha$	Kommutativgesetz der Multiplikation mit einem Skalar
4.)	$\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$	Assoziativgesetz der Multiplikation mit einem Skalar
5.)	$(\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$	1. Distributivgesetz
6.)	$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$	2. Distributivgesetz

1.12. Bemerkung:

1.) Die Addition aus Definition 1.8. ist für alle Vektoren erklärt.

2) Die Vektoraddition ist eindeutig, d.h. aus $\vec{v} + \vec{w} = \vec{c}$ und $\vec{v} + \vec{w} = \vec{d}$ folgt $\vec{c} = \vec{d}$

(Eindeutigkeit der Vektoraddition)

3) Die Addition zweier Vektoren des IR^n, $n \in IN$ führt nicht aus der Mange der Vektoren mit n Komponenten hinaus, mit $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n)$ folgt $\vec{a} + \vec{b}$ liefert wieder einen Vektor mit n Komponenten.
(Abgeschlossenheit der Vektoraddition)

4) Wie bei Zahlen gibt es ein neutrales Element $\vec{0}$ bzgl. Der Addition, so dass

$$\vec{v} + \vec{0} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_1 \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \vec{v}$$

(Existenz des neutralen Elements bzgl. der Vektoraddition).

Man nennt $\vec{0}$ den Nullvektor, er hat folgende Gestalt.

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

5) Existenz eines Inversen für jeden Vektor $\vec{v}$ bzgl. der Addition: Zu jedem Vektor $\vec{v}$ $\exists$ ein $\vec{w}$, so dass $\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$. Für den zu $\vec{v}$ inversen Vektor schreiben wir auch „-$\vec{v}$ “.

1.13 Bemerkung:

1.) Für jeden Skalar ist die Multiplikation mit einem Vektor erklärt.

2.) Eindeutigkeit der Multiplikation mit einem Skalar: Aus $\alpha\vec{v} = \vec{a}$ und $\alpha\vec{v} = \vec{b}$ folgt $\vec{a} = \vec{b}$.

3.) Abgeschlossenheit der Multiplikation mit einem Skalar, die Multiplikation eines Skalars α mit einem Vektor aus IR^n liefert wieder einen Vektor in IR^n.

4.) Für 1 multipliziert mit $\vec{v}$ gilt: $1\vec{v} = \vec{v}$

1.14. Definition: Sind in einer Menge V die Addition und die Multiplikation erklärt und gelten die Gesetzte aus 1.11. und sind die Bedingungen unter 1.12 und 1.13 erfüllt, so heißt V reeller Vektorraum.

1.15. Beispiel: IR^2 und IR^3 sind reelle Vektorräume.

1.16. Geometrische Deutung:

Geometrisch deutet man Vektoren als Ortsvektoren $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$, die den Nullpunkt/Ursprung mit dem Punkt der die Koordinaten $(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ besitzt, verbindet.

1.17. Definition:

1) Seien $\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_n$ Vektoren , $\alpha_{1\ldots.}\alpha_n$ Skalare, so nennt man $\alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n$ Linearkombination.

2) Die Vektoren $\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_n$ heißen linear abhängig (l.a.), wenn $\exists$ Koeffizienten, $\alpha_{1\ldots.}\alpha_n$, so dass

$\alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}$, wobei nicht alle $\alpha_i=0$ sind.

Andernfalls sind die Vektoren $\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_n$ linear unabhängig (l.u.).

Sind also $\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_n$ linear unabhängig und ist

$\alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}$, so folgt: $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$

1.19. Satz: Sei $U=(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ eine Menge aus Vektoren des IR^3 und $\vec{x}$ ein Vektor des IR^3. Wenn es zu jedem Vektor $\vec{x} \in IR^3$ Zahlen α, β,γ gibt, so dass sich $\vec{x}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ aus U darstellen lässt, dann heißt U ein Erzeugendensystem des IR^3.

1.20. Beispiel: $U=\{(1,0,0),(0,1,0), (1,1,0)\}$

$\vec{x} = (5,7,0)$

$$\vec{x} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

α= β= γ=

U bildet hier jedoch kein Erzeugendensystem für IR^3, da nicht jeder Vektor $\vec{x}$ sich n der geforderten Form darstellen lässt. Bsp: $\vec{y} = \begin{pmatrix}0\\0\\9\end{pmatrix}$

1.21. Definition: Sei U=($\vec{u}$,$\vec{v}$,$\vec{w}$) ein Erzeugendensystem des IR^3. Sind die Vektoren dieses Erzeugendensystems linear unabhängig, so nennt man das Erzeugendensystem U eine Basis des IR^3. Die Anzahl der Vektoren, die eine Basis bilden, ist die Dimension des Vektorraums.

1.22. Beispiel: Basis des IR^3: $U = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

Dimension: dim U=3

2 Matrizenrechnung

2.1. Matrix

Unter einer Matrix mit m Zeilen und n Spalten verstehen wir eine Menge von Zahlen, die in m Zeilen und n Spalten angeordnet sind.

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1\ldots m\\ j=1\ldots n}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & & & a_{mn}\end{bmatrix}$$

2.2 Beispiel:

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1\ldots4\\ j=1\ldots3}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & \frac{1}{3} & \sqrt{2} \\ 0 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

Die Elemente sind dabei jeweils durch Angabe der Zeile z.B. i=4 und der Spalte j=2 identifizierbar: $a_{42}=-7$.

2.3. Definition:

1.) Eine Matrix, die ebenso viele Zeilen wie Spalten besitzt ($n\times n$ Matrix), heißt quadratische Matrix.

2.) Die transponierte $\mathbf{A}^\tau$ einer Matrix **A** erhält man indem man Zeilen und Spalten vertauscht. Dabei entsteht aus einer $m\times n$ Matrix eine $n\times m$ Matrix. Bei quadratischen Matrizen bedeutet transponieren, dass an der Hauptdiagonalen gespiegelt wird.

3.) Eine quadratische Matrix heißt symmetrisch, wenn **$\mathbf{A}^\tau = \mathbf{A}$ ist.**

4.) Eine Matrix heißt Diagonalmatrix, wenn $a_{ik}=0\ \forall\ i\neq k$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & 0 & 3 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

5.) Eine Diagonalmatrix, deren Diagonale nur aus Einsen besteht, heißt Einheitsmatrix und wird mit **E** bezeichnet.

6.) Die Matrizen eines Matrizenpaares (**A**,**B**) heißen konform, wenn die Anzahl der Spalten von **A** gleich der Anzahl der Zeilen von **B** ist.

2.4. Spezialfälle:

(1 , 1) – Matrix: Zahl

(1 , n) – Matrix: n–dimensionaler Zeilenvektor

(n , 1) – Matrix: n–dimensionaler Spaltenvektor

2.5. Rechenregeln für Matrizen:

1.) $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$

2) $\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$

3.) $(\mathbf{A}+\mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

4.) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\,\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$

5.) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$

6.) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

Achtung: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

2.6. Addition von Matrizen, Multiplikation mit einem Skalar

$$\alpha\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & \cdots \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \end{bmatrix}$$

2.6. Matrizenmultiplikation

1. Zwei Matrizen lassen sich nur dann miteinander multiplizieren, wenn sie konform sind,

   d.h. sei **A** eine m×n Matrix und **B** eine n×p Matrix ,

   $$\overbrace{m \times \underbrace{n \qquad n}_{=} \times p}^{\text{Ergebnis: } m\times p \text{ Matrix}}$$

   konform, d.h. Multiplikation möglich.

   Als Ergebnis erhalten wir eine m×p Matrix.

2. Berechnungsschema:

<u>2.7. Beispiel:</u> $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2.8. Determinanten

2.8.1. Definition: Jeder quadratischen Matrix A mit reellen Elementen lässt sich auf eindeutige Weise eine reelle Zahl zuordnen, die man als Determinante von A bezeichnet. Es ist

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

<u>2.8.2. Berechnung der Determinante bei einer 3×3 Matrix mit der Regel von Sarrus:</u>

$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$

<u>2.8.3. Berechnung der Determinante bei einer quadratischen Matrix (n×n)</u>

Bei einer quadratischen Matrix (n×n) mit n>3 ist die Berechnung der Determinante mit der Regel von Sarrus nicht mehr möglich. Satt dessen verwendet man den Laplaceschen Entwicklungssatz:

Verfahren:

1.) Suche eine Zeile oder Spalte in der möglichst viele Nullen stehen.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2.) Hier: 2.te Zeile

3.) Man nimmt also die 2. Zeile und beginnt beim Element a_{21}, nun streicht man die die 2. Zeile und die 1. Spalte der Matrix A, so man erhält eine neue Matrix:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

deren Determinate kann wieder mit der Regel von Sarrus berechnet werden: det $\mathbf{A}_1$=0.

Das gleiche Vorgehen wird nun bei Element a_{22} angewandt. Man streicht die 2. Zeile und die 2. Spalte und erhält eine neue Matrix:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

deren Determinate kann wieder mit der Regel von Sarrus berechnet werden: det $\mathbf{A}_2$=0.

Ebenso verfährt man für a_{23} und a_{24}.

4.) Nun wird jede von uns berechnete Unterdeterminante mit einem Vorzeichen versehen. Dieses ergibt sich aus dem folgenden Schachbrettmuster:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$ und den jeweiligen a_{ij}.

Damit ergibt sich für die Determinante von **A**:

det **A** $= -a_{21}\det \mathbf{A}_1 + a_{22}\det \mathbf{A}_2 - a_{23}\det \mathbf{A}_3 + a_{24}\det \mathbf{A}_4$, also

det **A** $= -1\det \mathbf{A}_1 + 1\det \mathbf{A}_2 - 0\det \mathbf{A}_3 + 0\det \mathbf{A}_4$

$= -1 * 0 + 1*0 - \det \mathbf{A}_3 + 0\det \mathbf{A}_4$

$= 0$

2.9. Definition: Der Rang einer Matrix **A** (Rg **A**) ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen- oder Spaltenvektoren einer Matrix.

2.10 Satz:

1.) Ist bei einer $n \times n$- Matrix A: det A = 0 $\Rightarrow$ Rg A <n.

2.) Ist der Rang einer $n \times n$- Matrix **A**: Rg **A** =n $\Rightarrow$ det **A** $\neq$ 0.

3.) Matrix **A** hat Rang gleich k**:**

Rg **A**=k

$\Leftrightarrow \exists$ k linear unabhängige Zeilenvektoren

$\Leftrightarrow \exists$ k linear unabhängige Spaltenvektoren

<u>2.11 Berechnung des Rangs einer Matrix</u>

Folgende Umformungen ändern den Rang einer Matrix nicht:

1) Transponieren

2) Addition vom Vielfachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte).

3) Die Multiplikation einer Zeile (Spalte) mit α=0 ist nicht erlaubt.

VORSICHT: Es dürfen nur Zeilen <u>oder</u> Spaltenumformungen durchgeführt werden!

Hat die Matrix A Zeilenstufenform, so ist der Rang die Anzahl der Zeilen (Spalten), die nicht ausschließlich aus Nullen bestehen.

<u>2.12. Beispiel:</u>

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Rg **A**=