

Seminar: Mathematik für SoWi

Vorraussetzungen:

-Konventionen über die Reihenfolge von Rechenoperationen in IR

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c \quad (\text{Assoziativgesetz bzgl. der Addition})$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c \quad (\text{Assoziativgesetz bzgl. der Multiplikation})$$

$$a - b = a + (-b)$$

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

- 1.) Klammern haben absoluten Vorrang!!!!
(d.h. sie werden zuerst berechnet)
- 2.) Danach werden alle Potenzen berechnet – und zwar bei fehlenden Klammern von „oben nach unten“.
- 3.) Danach werden alle Punktoperationen (Multiplikation „•“ und Division „:“) von links nach rechts berechnet - immer unter der Voraussetzung, dass keine Klammern eine andere Reihenfolge erzwingen.
- 4.) Zuletzt werden alle Strichoperationen (Addition „+“ und Subtraktion „-“) durchgeführt.

Merkregel: Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich!!!

Beispiele:

$$\begin{aligned} \text{a.) } 5 + 3 \cdot ((9 - 6) \cdot 4)^2 - 7 &= 5 + 3 \cdot ((3 \cdot 4)^2 - 7) = 5 + 3 \cdot 12^2 - 7 = 5 + 3 \cdot 144 - 7 = \\ &= 5 + 432 - 7 = 430 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b.) } -2^4 &= -(2^4) = -16 \quad (\text{Potenz vor Strich!}) \\ \text{aber: } (-2)^4 &= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c.) } 4^{3^2} &= 4^{(3^2)} = 4^9 = 262144; \\ \text{aber: } (4^3)^2 &= 64^2 = 4096; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d.) } 48 : 3 : 4 \cdot 2 &= 16 : 4 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8; \\ \text{aber: } 48 : 3 : (4 \cdot 2) &= 16 : 8 = 2; \end{aligned}$$

Elementare Rechenregeln in IR:

→ **R1** $-(-a) = a;$

→ **R2** $-a = (-1) \cdot a;$

→ **R3a** $-ab = -(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b);$

Ein Minuszeichen vor einem Produkt ändert bei genau einem der Faktoren das Vorzeichen.

R3b $(-a) \cdot (-b) = ab;$

→ **R4a** $-\frac{a}{b} = -(a : b) = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b};$

R4b $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b};$

→ **R5**

$a(b + c) = ab + ac;$	$a(-b + c) = -ab + ac;$
$(-a)(b + c) = -ab - ac;$	$(-a)(-b + c) = ab - ac;$
$a(b - c) = ab - ac;$	$a(-b - c) = -ab - ac;$
$(-a)(b - c) = -ab - ac;$	$(-a)(-b - c) = ab + ac;$

→ **R6** $a(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = ax_1 + ax_2 + \dots + ax_n;$

→ **R7** $-(a + b) = -a - b; \quad -(-a + b) = a - b;$
 $-(a - b) = -a + b; \quad -(-a - b) = a + b;$

Ein Minuszeichen vor einer geklammerten Summe ändert bei jedem Summanden das Vorzeichen bzw. das Rechenzeichen.

$$-(a - b + c + d) = -a + b - c - d;$$

Die Klammer bei einer Summe bzw. Subtraktion können weggelassen werden, wenn ein Pluszeichen vor der Klammer steht.

$$+(a - b + c + d) = a - b + c + d;$$

Ein Bruchstrich wirkt auf Zähler und auf Nenner wie eine Klammer.

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{(a+b)}{(c+d)} \text{ mit } (c+d) \neq 0;$$

Aber: $\frac{(a+b)}{(c+d)} = (a+b) : (c+d) \text{ mit } (c+d) \neq 0;$

Hier sind die Klammern unbedingt notwendig, wegen „**Punkt vor Strich**“!!!!

→ **R8** Multiplikation von Brüchen

R8a $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \text{ mit } b, d \neq 0;$

R8b $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b} = a \cdot \frac{c}{b}, \text{ mit } b \neq 0;$

→ **R9** Division von Brüchen, Doppelbrüchen

$$\mathbf{R9a} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \quad \text{mit } c, b, d \neq 0;$$

$$\mathbf{R9b} \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} : c, \quad \text{mit } b, c \neq 0;$$

$$\mathbf{R9c} \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}, \quad \text{mit } b, c \neq 0;$$

→ **R10** Kürzungsregeln, Erweiterungsregeln

$$\text{Kürzen durch } c: \quad \frac{a \bullet c}{b \bullet c} = \frac{a}{b}, \quad \text{mit } b, c \neq 0;$$

$$\text{Erweiterung mit } x: \quad \frac{a}{b} = \frac{a \bullet x}{b \bullet x}, \quad \text{mit } b, x \neq 0;$$

Zwei Brüche sind genau dann gleich, wenn sie durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgegangen sind.

Vorsicht: $\frac{a+3x}{b+2x}$ ist nicht durch x kürzbar!

→ **R11** Addition gleichnamiger Brüche

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, \quad \text{mit } c \neq 0;$$

→ **R12** Addition beliebiger Brüche

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \bullet d}{b \bullet d} \pm \frac{c \bullet b}{b \bullet d} = \frac{a \bullet d \pm c \bullet b}{b \bullet d}, \quad \text{mit } b, d \neq 0;$$

→ **R13a** $a \bullet 0 = 0 \bullet a = 0;$

$$\mathbf{R13b} \quad \frac{0}{b} = 0;$$

$$\mathbf{R13c} \quad a \bullet b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0;$$

$$\mathbf{R13d} \quad \frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b \neq 0; \quad \text{Dividieren durch Null ist nicht erlaubt!}$$

Betrag einer Zahl

Def: Unter dem Betrag $|a|$ einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ versteht man

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{wenn } a > 0 \\ 0, & \text{wenn } a = 0 \\ -a, & \text{wenn } a < 0; \end{cases}$$

Beispiele: $|17| = 17$; $|-2| = 2$; $|0| = 0$;

Binomische Formeln

- 1.) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
- 2.) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
- 3.) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$;

Das Summenzeichen

Eine Summe mit mehreren Summanden lässt sich mit Hilfe des Summenoperators/ Summenzeichens \sum häufig kurz und übersichtlich schreiben:

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+n}, \quad \text{mit } n \geq m \wedge m, n \in \mathbf{Z};$$

(gelesen: Die Summe aller a_i von $i=m$ bis n)

Beispiele: $\sum_{i=4}^6 a_i = a_4 + a_5 + a_6$;

$$\sum_{i=1}^{k-1} i \cdot c_{i+7} = c_8 + 2c_9 + 3c_{10} + \dots + (k-1)c_{k+6}$$
;

$$\sum_{i=1}^3 (i+1)i = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 20$$
;

Rechenregeln:

$$1.) \sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i,$$

$$\text{da } (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \dots + (a_n \pm b_n) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \dots + b_n);$$

$$2.) \sum_{i=1}^n c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^n a_i,$$

$$\text{da } c a_1 + c a_2 + c a_3 + \dots + c a_n = c(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n);$$

$$3.) \sum_{i=1}^n c = c + c + c \dots + c = nc;$$

$$\text{VORSICHT: } \sum_{i=1}^n (a_i \cdot b_i) \neq \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i;$$

Das Produktzeichen

Def: $\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \dots \cdot a_n$, mit $n \geq m \wedge m, n \in \mathbf{Z}$;

Beispiel: $\prod_{i=1}^4 (i+1) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$;

Potenzen:

Wird eine reelle Zahl a mit sich selbst n mal multipliziert, so führt man für das zu entstehende Produkt $a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ eine neue Schreibweise ein:

Def: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n -Faktoren!), $n \in \mathbf{IN}$;

$$a^0 = 1, \forall a \in \mathbf{IR};$$

$$a^1 = a;$$

a heißt Basis (Grundzahl),

n heißt Exponent (Hochzahl),

a^n heißt Potenz (Potenzwert).

Satz:

P1: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

P2: a^{m-n} , für $m > n$;

$$\frac{a^m}{a^n} = 1, \text{ für } m=n;$$

$$\frac{1}{a^{n-m}}, \text{ für } m < n;$$

P3: $(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$;

P4: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

P5: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, mit $b \neq 0$;

Beispiele:

$$a^2 \cdot a^3 = a^5;$$

$$\frac{a^5}{a^3} = a^2;$$

$$\frac{a^3}{a^3} = 1;$$

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^{5-3}} = a^{-2};$$

$$(a^2)^3 = a^6 = (a^3)^2;$$

$$\begin{aligned} (a \cdot b)^3 &= (a \cdot b)(a \cdot b)(a \cdot b) = \\ &= a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a^3 \cdot b^3; \end{aligned}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3};$$

Def: 1.) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$;
 2.) $a^0 = 1$;

Potenzen mit rationalen (gebrochenen) Exponenten:

Def: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, mit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $a \geq 0$;

Beispiel: $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$;

Def: 1.) Die Potenz $a^{\frac{m}{n}}$ ($a \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$) ist die nicht negative Lösung der Gleichung

$$x^n = a^m, \text{ d.h. } (a^{\frac{m}{n}})^n = a^m.$$

2.) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Beispiel: $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$ bzw. $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$;

Bemerkung: (ohne Beweis)

Die als Exponenten auftretenden Brüche dürfen nur mit Hilfe der Rechenregeln für Brüche umgeformt werden (z.B. erweitert oder/und gekürzt), sofern die Basis stets positiv ist!

Anderenfalls können Widersprüche auftreten, z.B.:

$$-8 = (-2)^3 = (-2)^{\frac{6}{2}} = ((-2)^6)^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{2}} = 8, \text{ aber } -8 \neq 8!!!!$$

Rechenregeln für Wurzeln

Voraussetzung: $a, b > 0$; $n, m \in \mathbb{N}$; $r, s \in \mathbb{Q}$ mit $\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid \forall a \in \mathbb{Z} \wedge \forall b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \}$

$$\mathbf{W1:} \quad \sqrt[n]{a^r} \cdot \sqrt[m]{a^s} = a^{\frac{r}{n}} \cdot a^{\frac{s}{m}} = a^{\frac{r}{n} + \frac{s}{m}} = a^{\frac{rm+sn}{nm}} = \sqrt[nm]{a^{rm+sn}};$$

$$\mathbf{W2:} \quad \sqrt[n]{a^r} : \sqrt[m]{a^s} = \sqrt[nm]{a^{rm-sn}};$$

$$\mathbf{W3:} \quad \sqrt[m]{(\sqrt[n]{a^r})^s} = (a^{\frac{r}{n}})^{\frac{s}{m}} = a^{\frac{rs}{nm}} = \sqrt[nm]{a^{rs}};$$

$$\mathbf{W4:} \quad \sqrt[n]{a^r} \cdot \sqrt[n]{b^r} = a^{\frac{r}{n}} \cdot b^{\frac{r}{n}} = (ab)^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^r};$$

$$\mathbf{W5:} \quad \frac{\sqrt[n]{a^r}}{\sqrt[n]{b^r}} = \frac{a^{\frac{r}{n}}}{b^{\frac{r}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^r};$$

Bemerkung: 1.) Für n gerade und $a \in \mathbb{R}$ gilt: $\sqrt[n]{a^n} = (a^n)^{\frac{1}{n}} = |a|$;

2.) Für n ungerade und $a \in \mathbb{R}, a \leq 0$ gilt: $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{(-1)^n} \cdot \sqrt[n]{|a|^n} = (-1) \cdot |a|$;

$$\text{Beispiel: } (-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-1) \cdot 8} = (-1) \cdot \sqrt[3]{8} = (-1) \cdot 2 = -2;$$